

**Anton Negrilă**

**Maria Negrilă**

# **MATEMATICĂ**

**TEME RECAPITULATIVE**

**CLASA A VII-A**

EDIȚIA A III-A, REVIZUITĂ ȘI ADĂUGITĂ

**Editura Paralela 45**

# CUPRINS

## ALGEBRĂ

### CAPITOLUL I. MULȚIMEA NUMERELOR REALE..... 7

I.1. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional.....	7
I.2. Rădăcina pătrată a unui număr rațional nenegativ.....	9
I.3. Mulțimea numerelor reale.....	10
I.4. Reguli de calcul cu radicali.....	11
I.5. Scoaterea factorilor de sub radical. Introducerea factorilor sub radical.....	12
I.6. Operații cu numere reale.....	13
I.7. Raționalizarea numitorului unei fracții.....	16
I.8. Formule de calcul prescurtat.....	23
I.9. Ecuații de forma $x^2 = a$ , $a \in \mathbb{R}$ .....	24

### CAPITOLUL II. ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE..... 27

II.1. Ecuații de gradul I cu o necunoscută.....	27
II.2. Sisteme de două ecuații de gradul I cu două necunoscute.....	31
II.3. Rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuațiilor și al sistemelor de ecuații liniare.....	36

### CAPITOLUL III. ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR..... 39

III.1. Produsul cartezian a două mulțimi nevide. Sisteme de axe ortogonale în plan. Reprezentarea punctelor în sistem de axe ortogonale. Distanța dintre două puncte din plan.....	39
--	----

## GEOMETRIE

### I. PATRULATERUL..... 43

I.1. Patrulatere convexe.....	43
I.2. Paralelogramul.....	43
I.3. Linia mijlocie în triunghi.....	44
I.4. Dreptunghiul.....	45
I.5. Rombul.....	46
I.6. Pătratul.....	47
I.7. Trapezul.....	48
I.8. Aria triunghiului.....	49
I.9. Aria patrulaterului.....	52

<b>CAPITOLUL II. CERCUL</b> .....	<b>58</b>
<b>CAPITOLUL III. ASEMĂNAREA TRIUNGHURILOR</b> .....	<b>61</b>
III.1. Teorema lui Thales.....	61
III.2. Teorema fundamentală a asemănării.....	62
<b>CAPITOLUL IV. RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHUL DREPTUNGHIC</b> .....	<b>67</b>
<b>PROBLEME RECAPITULATIVE</b> .....	<b>72</b>
<b>INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI</b> .....	<b>76</b>

EDITURA PARALELA 45

1

## MULȚIMEA NUMERELOR REALE

- I.1. Rădăcina pătrată a unui număr natural. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional
- I.2. Rădăcina pătrată a unui număr rațional nenegativ
- I.3. Mulțimea numerelor reale
- I.4. Reguli de calcul cu radicali. Produsul radicalilor. Câtul radicalilor
- I.5. Scoaterea factorilor de sub radical. Introducerea factorilor sub radical
- I.6. Operații cu numere reale
- I.7. Raționalizarea numitorului unei fracții
- I.8. Formule de calcul prescurtat
- I.9. Ecuații de forma  $x^2 = a$ ,  $a \in \mathbb{R}$

2

## ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

- II.1. Ecuații de gradul I cu o necunoscută
- II.2. Sisteme de două ecuații de gradul I cu două necunoscute
- II.3. Rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuațiilor și al sistemelor de ecuații liniare

3

## ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR

- III.1. Produsul cartezian a două mulțimi nevide. Sisteme de axe ortogonale în plan. Reprezentarea punctelor în sistem de axe ortogonale. Distanța dintre două puncte din plan

### I.1. RĂDĂCINA PĂTRATĂ A PĂTRATULUI UNUI NUMĂR NATURAL. ESTIMAREA RĂDĂCINII PĂTRATE DINTR-UN NUMĂR RAȚIONAL

1. Stabiliți care dintre următoarele numere sunt pătrate perfecte:

- a) 25, 9, 35, 46, 144, 180, 289, 324, 340, 361;  
 b)  $15^2$ ,  $(-7)^4$ ,  $3^{10}$ ,  $(-10)^5$ ,  $(-14)^{12}$ ,  $(-7)^9$ ,  $(-24)^7$ ,  $(-32)^6$ ;  
 c)  $7^{6n}$ ,  $5^{4n+2}$ ,  $18^{n^2+1}$ ,  $17^{n^2+n}$ ,  $14^{n^2-n+4}$ ,  $n > 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

2. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

- a)  $\sqrt{81} = 9$ ;                      b)  $\sqrt{7^2} = 7$ ;                      c)  $\sqrt{(-6)^2} = -6$ ;                      d)  $\sqrt{(-108)^2} = -108$ ;  
 e)  $\sqrt{64a^2} = 8a$ ,  $a < 0$ ;                      f)  $\sqrt{(-36a^2)^2} = 36a^2$ ;                      g)  $\sqrt{25a^4b^2} = 5a^2b$ ,  $b < 0$ .

3. Rezolvați ecuațiile:

- a)  $x^2 = 49$ ;                      b)  $x^2 = 121$ ;                      c)  $4x^2 = 1600$ ;                      d)  $5x^2 = 320$ ;  
 e)  $-3x^2 = -48$ ;                      f)  $x^2 + 16 = 241$ ;                      g)  $2x^2 - 25 = 263$ ;                      h)  $3x^2 - 256 = 716$ .

4. Folosind formula  $1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$ , unde  $a \neq 1$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , calculați:

- a)  $\sqrt{x+1}$ , unde  $x = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2019}$ ;  
 b)  $\sqrt{2x+1}$ , unde  $x = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2017}$ ;  
 c)  $\sqrt{4x+1}$ , unde  $x = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2015}$ ;  
 d)  $\sqrt{8x+1}$ , unde  $x = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2014}$ ;  
 e)  $\sqrt{35x+1}$ , unde  $x = 1 + 6^2 + 6^4 + 6^6 + \dots + 6^{2010}$ .

5. Calculați numărul natural  $x$  și arătați că este pătratul unui număr natural, apoi calculați  $\sqrt{x}$ :

- a)  $x - 4 = 3(4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{2016})$ ;  
 b)  $x - 9 = 8(9 + 9^2 + 9^3 + \dots + 9^{2018})$ ;  
 c)  $x - 16 = 15(16 + 16^2 + 16^3 + \dots + 16^{2020})$ .

6. Arătați că numărul  $x$  este pătrat perfect, pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ , unde  $x = 3^{2n+5} \cdot 4^{2n+5} - 2^{2n+3} \cdot 6^{2n+5}$ .

7. Arătați că, pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ , următoarele numere nu sunt pătrate perfecte:

- a)  $x = 5n + 2$ ;                      b)  $x = 15n + 7$ ;                      c)  $x = 25n - 8$ ;                      d)  $x = 10n + 3$ ;  
 e)  $x = 6^n + 7$ ;                      f)  $x = 10^n + 8$ ;                      g)  $x = 21^n + 36$ ;                      h)  $x = 15^n + 28$ .

8. Arătați că numerele de mai jos nu sunt pătrate perfecte:

- a)  $x = 8 + 8^2 + 8^3 + 8^4 + \dots + 8^{2013}$ ;                      b)  $x = 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \dots + 7^{2009}$ .

9. Fie numărul natural  $a = 8^{2n} \cdot 225^{n+1} + 15^{2n} \cdot 64^{n+1}$ , unde  $n \in \mathbb{N}^*$ . Arătați că numărul  $\sqrt{a}$  este număr natural par, pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

10. Se consideră numărul  $a = 9^{3n+3} \cdot 60^{2n} + 9^{2n+1} \cdot 12^{2n+2} \cdot 15^{2n} + 9^{3n+1} \cdot 12^{2n} \cdot 5^{2n+2} \cdot 16$ , unde  $n \in \mathbb{N}^*$ . Arătați că numărul  $\sqrt{a}$  este număr natural par, pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

11. Efectuați:

a)  $\sqrt{15^2}, \sqrt{21^4}, \sqrt{(-29)^2}, \sqrt{(-5)^6}, \sqrt{(-11)^4}, \sqrt{a^2}, \sqrt{a^4}, \sqrt{a^6}, a \in \mathbb{Z}$ ;

b)  $\sqrt{2^6 \cdot 3^4}, \sqrt{12^2 \cdot 7^2}, \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^4}, \sqrt{2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2}, \sqrt{2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}$ ;

c)  $\sqrt{(-2)^2 \cdot (-3)^4}, \sqrt{(-2)^4 \cdot (-3)^2 \cdot (-5)^2}, \sqrt{(-2)^4 \cdot (-5)^2 \cdot (-7)^2}$ ;

d)  $\sqrt{(-17)^2}, \sqrt{(-21)^4}, \sqrt{(-27)^6}, \sqrt{(-31)^8}, \sqrt{(-15)^6}, \sqrt{(-28)^4}$ .

12. Calculați rădăcina pătrată, folosind algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate:

a)  $\sqrt{4096}; \sqrt{2304}; \sqrt{3136}; \sqrt{1764}; \sqrt{5184}; \sqrt{7056}$ ;

b)  $\sqrt{15376}; \sqrt{18496}; \sqrt{29584}; \sqrt{132496}; \sqrt{104976}$ .

13. Calculați:

a)  $\sqrt{55696} - \sqrt{54756} + \sqrt{9216}$ ;

b)  $\sqrt{186624} - \sqrt{419904} + \sqrt{148996}$ .

14. Calculați:

a)  $\sqrt{5^2 + 12^2}$ ;

b)  $\sqrt{8^2 + 15^2}$ ;

c)  $\sqrt{7^2 + 24^2}$ ;

d)  $\sqrt{9^2 + 12^2 + 20^2}$ ;

e)  $\sqrt{20^2 - 16^2 + 9^2}$ ;

f)  $\sqrt{45^2 - 27^2 + 48^2}$ ;

g)  $\sqrt{3^2 \cdot 30^2 - 3^2 \cdot 18^2 + 3^2 \cdot 32^2}$ .

15. Determinați-l pe  $x \in \mathbb{N}$ , știind că:

a)  $\sqrt{2^{3960} - 2^{3959} - 2^{3958} - \dots - 2^{2004}} = 2^{6x}$ ;

b)  $\sqrt{3^{2020} - 2 \cdot 3^{2019} - 2 \cdot 3^{2018} - 2 \cdot 3^{2017} - \dots - 2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 - 2} = 3^x$ .

16. Demonstrați că numărul  $A = 80 \cdot 5^{2n} \cdot 4^{3n} + 20 \cdot 10^{2n} \cdot 2^{4n}$  este pătrat perfect pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

17. Determinați numărul natural  $x$  care verifică egalitatea:

$$\sqrt{1 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^3 + \dots + 3 \cdot 4^{2020} + 3 \cdot 4^{2021}} = 2^{6x}.$$

18. Calculați valoarea numărului:

$$x = \sqrt{\left[ \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{53 \cdot 54} \right) - \left( \frac{1}{54 \cdot 55} + \frac{1}{55 \cdot 56} + \dots + \frac{1}{107 \cdot 108} \right) \right]} \cdot \frac{180}{7}.$$

19. Se consideră numărul  $a = 9^{2n+1} \cdot 144^n \cdot 16 + 81 \cdot 12^{2n} \cdot 9^{2n} + 25 \cdot 4^{2n+2} \cdot 9^{3n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Arătați că  $\sqrt{a}$  este număr natural par, oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$ .

20. Determinați valoarea numărului natural  $a$  pentru care  $a = \sqrt{1+3+5+7+\dots+2021+2023}$ .

## 1.2. RĂDĂCINA PĂTRATĂ A UNUI NUMĂR RAȚIONAL NENEGATIV

1. Se consideră mulțimea:

$$A = \left\{ -\frac{3}{5}, \sqrt{49}, -\frac{28}{4}, 5, 2, \frac{1}{4}, -2\sqrt{4}, -3\sqrt{9}, \sqrt{81}, -\sqrt{1}, \frac{3}{8}, 0, 15 \right\}.$$

Scrieți elementele mulțimilor:  $A \cap \mathbb{N}$ ;  $A \cap \mathbb{Z}$ ;  $A \cap \mathbb{Q}$ ;  $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$ ;  $A \cap (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$ .

2. Calculați:

a)  $\sqrt{\frac{25}{36}}$ ;

b)  $\sqrt{\frac{49}{64}}$ ;

c)  $\sqrt{\frac{9}{169}}$ ;

d)  $\sqrt{\frac{144}{289}}$ ;

e)  $\sqrt{\frac{121}{256}}$ ;

f)  $\sqrt{\frac{324}{625}}$ ;

g)  $\sqrt{1\frac{7}{9}}$ ;

h)  $\sqrt{1\frac{9}{16}}$ ;

i)  $\sqrt{4\frac{21}{25}}$ ;

j)  $\sqrt{2\frac{41}{64}}$ ;

k)  $\sqrt{14\frac{1}{16}}$ ;

l)  $\sqrt{12\frac{24}{25}}$ .

3. Calculați:

a)  $\sqrt{0,64}$ ;

b)  $\sqrt{1,69}$ ;

c)  $\sqrt{5,76}$ ;

d)  $\sqrt{0,2304}$ ;

e)  $\sqrt{0,2916}$ ;

f)  $\sqrt{4,6656}$ ;

g)  $\sqrt{10,4976}$ ;

h)  $\sqrt{1,1664}$ ;

i)  $\sqrt{6,4516}$ .

4. Calculați:

a)  $1\frac{2}{3} \cdot \sqrt{0,09} - 2\frac{5}{8} \cdot \sqrt{0,4} + 0,6 \cdot \sqrt{0,5625}$ ;

b)  $1\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{64}{729}} - \frac{4}{5} \cdot \sqrt{3,0625} + \frac{3}{8} \cdot \sqrt{0,64}$ .

5. Calculați:

a)  $\sqrt{\frac{1+3+5+7+\dots+2021}{1+3+5+7+\dots+1013}}$ ;

b)  $\sqrt{\frac{1+3+5+7+\dots+75}{1+3+5+7+\dots+37}}$ ;

c)  $\sqrt{\frac{2}{5} \left[ \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{63 \cdot 64} \right) - \left( \frac{1}{64 \cdot 65} + \frac{1}{65 \cdot 66} + \dots + \frac{1}{127 \cdot 128} \right) \right]}$ ;

d)  $\sqrt{2 \left[ \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{74 \cdot 75} \right) - \left( \frac{1}{75 \cdot 76} + \frac{1}{76 \cdot 77} + \dots + \frac{1}{149 \cdot 150} \right) \right]}$ .

6. Calculați numărul:

$$N = \sqrt{(x+y-6)^2} + \sqrt{(x+y+7)^2} - \sqrt{(x-y-5)^2} - \sqrt{(x-y+6)^2},$$

unde  $x$  și  $y$  sunt numere raționale astfel încât  $-2 \leq x \leq 2$  și  $-3 \leq y \leq 3$ .

## I.3. MULȚIMEA NUMERELOR REALE

1. Se consideră mulțimea:

$$A = \left\{ -\frac{4}{7}, -\sqrt{49}, 0,08(3), -\frac{2}{5}, -\sqrt{36}, \frac{-32}{-4}, \frac{\sqrt{81}}{9}, 3, 5, -\sqrt{72}, -\sqrt{147}, \frac{\sqrt{100}}{5}, \sqrt{1,(7)}, \sqrt{12}, -\sqrt{\frac{25}{64}}, -\sqrt{0,(4)} \right\}.$$

Scrieți elementele mulțimilor:

$$A \cap \mathbb{N}; A \cap \mathbb{Z}; A \cap \mathbb{Q}; A \setminus \mathbb{Q}; A \setminus \mathbb{Z}; A \setminus \mathbb{R}; A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}); A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}).$$

2. Se consideră mulțimea:

$$A = \left\{ -\sqrt{16}, \sqrt{81}, -\frac{7}{2}, -\frac{54}{9}, -0,6, \frac{\sqrt{36}}{18}, \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{16}}, 1,2(3), \sqrt{2^2 \cdot 3^2}, \sqrt{2^4 \cdot 3^2}, -\sqrt{48}, \sqrt{18}, -\sqrt{24}, -\sqrt{25} \right\}.$$

Scrieți elementele mulțimilor:

$$A \cap \mathbb{N}; A \cap \mathbb{Z}; A \cap \mathbb{Q}; A \setminus \mathbb{Q}; A \setminus \mathbb{R}; A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}); A \setminus \mathbb{Z}; A \setminus \mathbb{N}.$$

3. Fie mulțimea:

$$A = \left\{ \sqrt{16}, \sqrt{6\frac{1}{4}}, \sqrt{1\frac{5}{16}}, \sqrt{1\frac{24}{25}}, \sqrt{7\frac{1}{9}}, \sqrt{0,(4)}, \sqrt{4\frac{3}{4}}, \sqrt{2^4 \cdot 3^2}, \sqrt{(-8)^2} \right\}.$$

Scrieți elementele mulțimilor  $A \cap \mathbb{N}$ ;  $A \cap \mathbb{Q}$ ;  $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ .

4. Determinați elementele mulțimilor:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid |x| \leq 6\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\};$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = 8\};$$

$$D = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2 \leq |x| < 7\}.$$

5. Arătați că numărul  $x$  este irațional în fiecare dintre cazurile:

a)  $x = \sqrt{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 2021 + 2022}$ ;

b)  $x = \sqrt{(1+3+5+7+\dots+2023)+2024}$ .

6. Arătați că numerele de mai jos sunt iraționale:

a)  $\sqrt{2}$ ;

b)  $\sqrt{3}$ ;

c)  $6\sqrt{2}$ ;

d)  $-4\sqrt{3}$ .

7. Arătați că numerele de mai jos sunt iraționale:

a)  $4 - \sqrt{2}$ ;

b)  $5 - 2\sqrt{2}$ ;

c)  $3\sqrt{3} + 5$ ;

d)  $3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ .

8. Demonstrați că, pentru orice număr natural  $n$ , următoarele numere sunt iraționale:

a)  $\sqrt{5n+8}$ ;

b)  $\sqrt{10n+3}$ ;

c)  $\sqrt{15n-7}$ ;

d)  $\sqrt{5^n+2}$ .

## I.4. REGULI DE CALCUL CU RADICALI

### Produsul radicalilor

Dacă  $a \geq 0$  și  $b \geq 0$ , atunci  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ .

**Consecințe:**  $(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;  $\sqrt{a^2} = |a|$ , pentru orice  $a \in \mathbb{R}$ .

**Atenție!** Dacă  $a > 0$  și  $b > 0$ , atunci  $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ , dar nu avem niciodată  $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$ . Această egalitate este falsă. Întotdeauna avem  $\sqrt{a^2 + b^2} \neq \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$ .

1. Efectuați calculele:

a)  $\sqrt{12} \cdot \sqrt{1,5} \cdot \sqrt{2}$ ;

b)  $\sqrt{1\frac{7}{9}} \cdot \sqrt{2\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{1\frac{9}{16}}$ ;

c)  $\sqrt{5,76} \cdot \sqrt{2,25} \cdot \sqrt{0,16}$ ;

d)  $\sqrt{3,6} \cdot \sqrt{6,4} \cdot \sqrt{6,25}$ ;

e)  $\sqrt{0,08(3)} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{0,8(3)}$ ;

f)  $\sqrt{5} \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt{10}$ .

2. Calculați:

a)  $\sqrt{2,4} \cdot \sqrt{0,8(3)} \cdot \sqrt{4,5}$ ;

b)  $\sqrt{\frac{8}{15}} \cdot \sqrt{6,25} \cdot \sqrt{1\frac{23}{25}}$ ;

c)  $\sqrt{1\frac{1}{8}} \cdot \sqrt{3\frac{6}{25}} \cdot \sqrt{3,125}$ ;

d)  $\sqrt{6,3} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{3,6}$ ;

e)  $\sqrt{3,24} \cdot \sqrt{2,56} \cdot \sqrt{6,25}$ ;

f)  $\sqrt{6,25} \cdot \sqrt{2,(7)} \cdot \sqrt{5,76}$ .

### Câtul radicalilor

Oricare ar fi  $a \geq 0$  și  $b \geq 0$ , avem  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$  sau  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ .

**Consecință:**  $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^n = \frac{\sqrt{a^n}}{\sqrt{b^n}} = \frac{(\sqrt{a})^n}{(\sqrt{b})^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Calculați:

a)  $\sqrt{972} : \sqrt{3}$ ;

b)  $\sqrt{180} : \sqrt{5}$ ;

c)  $\sqrt{343} : \sqrt{7}$ ;

d)  $\sqrt{384} : \sqrt{6}$ ;

e)  $\sqrt{405} : \sqrt{5}$ ;

f)  $\sqrt{864} : \sqrt{6}$ ;

g)  $\sqrt{1728} : \sqrt{3}$ ;

h)  $\sqrt{1176} : \sqrt{6}$ .

2. Calculați:

a)  $\sqrt{2^5 \cdot 3^7} : \sqrt{2^3 \cdot 3^5}$ ;

b)  $\sqrt{3^7 \cdot 5^5} : \sqrt{3^3 \cdot 5}$ ;

c)  $\sqrt{2^7 \cdot 5^3} : \sqrt{2^3 \cdot 5}$ ;

d)  $\sqrt{2^5 \cdot 3^3} : \sqrt{2 \cdot 3}$ ;

e)  $\sqrt{2^7 \cdot 5^5} : \sqrt{2^3 \cdot 5^3}$ ;

f)  $\sqrt{3^5 \cdot 5^7} : \sqrt{3 \cdot 5^5}$ .

3. Calculați, scriind sub un singur radical:

a)  $\frac{\sqrt{300}}{\sqrt{12}}$ ;

b)  $\frac{\sqrt{540}}{\sqrt{15}}$ ;

c)  $\frac{\sqrt{288}}{\sqrt{18}}$ ;

d)  $\frac{\sqrt{294}}{\sqrt{6}}$ ;

e)  $\frac{\sqrt{768}}{\sqrt{12}}$ ;

f)  $\frac{\sqrt{1215}}{\sqrt{15}}$ ;

g)  $\frac{\sqrt{2592}}{\sqrt{18}}$ ;

h)  $\frac{\sqrt{4536}}{\sqrt{14}}$ ;

i)  $\frac{\sqrt{968}}{\sqrt{8}}$ ;

j)  $\frac{\sqrt{192}}{\sqrt{12}}$ .

### I.5. SCOATEREA FACTORILOR DE SUB RADICAL. INTRODUCEREA FACTORILOR SUB RADICAL

Dacă  $n \geq 0$  și  $n = a^2 \cdot b$ , atunci  $\sqrt{n} = \sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}$  pentru  $a > 0$  și  $\sqrt{n} = -a\sqrt{b}$  pentru  $a < 0$ .

1. Scoateți factorii de sub radical:

a)  $\sqrt{12}$ ;      b)  $\sqrt{18}$ ;      c)  $\sqrt{48}$ ;      d)  $\sqrt{162}$ ;      e)  $\sqrt{243}$ ;      f)  $\sqrt{72}$ ;  
g)  $\sqrt{75}$ ;      h)  $\sqrt{288}$ ;      i)  $\sqrt{192}$ ;      j)  $\sqrt{450}$ ;      k)  $\sqrt{98}$ ;      l)  $\sqrt{200}$ .

2. Scoateți factorii de sub radical:

a)  $\sqrt{24}$ ;      b)  $\sqrt{216}$ ;      c)  $\sqrt{54}$ ;      d)  $\sqrt{486}$ ;      e)  $\sqrt{864}$ ;      f)  $\sqrt{96}$ ;  
g)  $\sqrt{150}$ ;      h)  $\sqrt{294}$ ;      i)  $\sqrt{600}$ ;      j)  $\sqrt{1014}$ ;      k)  $\sqrt{726}$ ;      l)  $\sqrt{1176}$ .

3. Introduceți factorii sub radical:

a)  $3\sqrt{2}$ ;      b)  $6\sqrt{2}$ ;      c)  $4\sqrt{2}$ ;      d)  $7\sqrt{2}$ ;      e)  $11\sqrt{2}$ ;      f)  $14\sqrt{2}$ ;  
g)  $8\sqrt{3}$ ;      h)  $12\sqrt{3}$ ;      i)  $9\sqrt{3}$ ;      j)  $14\sqrt{3}$ ;      k)  $16\sqrt{3}$ ;      l)  $18\sqrt{3}$ ;  
m)  $5\sqrt{6}$ ;      n)  $2\sqrt{6}$ ;      o)  $4\sqrt{6}$ ;      p)  $8\sqrt{6}$ ;      q)  $3\sqrt{6}$ ;      r)  $7\sqrt{6}$ .

4. Scoateți factorii de sub radical:

a)  $\sqrt{288}$ ;  $\sqrt{98}$ ;  $\sqrt{162}$ ;  $\sqrt{72}$ ;  $\sqrt{450}$ ;  $\sqrt{32}$ ;  $\sqrt{128}$ ;      b)  $\sqrt{48}$ ;  $\sqrt{147}$ ;  $\sqrt{243}$ ;  $\sqrt{108}$ ;  $\sqrt{75}$ ;  $\sqrt{432}$ ;  $\sqrt{192}$ ;  
c)  $\sqrt{24}$ ;  $\sqrt{150}$ ;  $\sqrt{384}$ ;  $\sqrt{294}$ ;  $\sqrt{96}$ ;  $\sqrt{486}$ ;  $\sqrt{864}$ ;      d)  $\sqrt{45}$ ;  $\sqrt{80}$ ;  $\sqrt{245}$ ;  $\sqrt{405}$ ;  $\sqrt{320}$ ;  $\sqrt{20}$ ;  $\sqrt{180}$ .

5. Scoateți factorii de sub radical:

a)  $\sqrt{50}$ ;  $\sqrt{242}$ ;  $\sqrt{200}$ ;  $\sqrt{338}$ ;  $\sqrt{392}$ ;  $\sqrt{18}$ ;  $\sqrt{512}$ ;      b)  $\sqrt{300}$ ;  $\sqrt{363}$ ;  $\sqrt{27}$ ;  $\sqrt{507}$ ;  $\sqrt{588}$ ;  $\sqrt{768}$ ;  $\sqrt{675}$ ;  
c)  $\sqrt{45}$ ;  $\sqrt{180}$ ;  $\sqrt{500}$ ;  $\sqrt{605}$ ;  $\sqrt{845}$ ;  $\sqrt{980}$ ;  $\sqrt{1125}$ ;      d)  $\sqrt{150}$ ;  $\sqrt{600}$ ;  $\sqrt{726}$ ;  $\sqrt{864}$ ;  $\sqrt{1014}$ ;  $\sqrt{1176}$ ;  $\sqrt{1350}$ .

6. Calculați:

a)  $\sqrt{(1-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}$ ;      b)  $\sqrt{(\sqrt{7}-4)^2} + \sqrt{(2-\sqrt{7})^2}$ ;  
c)  $\sqrt{(\sqrt{2}-3)^2} + \sqrt{(\sqrt{2}-2)^2} - \sqrt{(2\sqrt{2}-4)^2}$ ;  
d)  $\sqrt{(2\sqrt{2}-4)^2} + \sqrt{(3\sqrt{2}-5)^2} - \sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2} + \sqrt{(4-3\sqrt{2})^2}$ .

7. Calculați:

a)  $\sqrt{(2-\sqrt{6})^2} + \sqrt{(1+\sqrt{6})^2} + \sqrt{(2\sqrt{6}-5)^2}$ ;  
b)  $\sqrt{(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3-2\sqrt{3})^2} - \sqrt{(4-3\sqrt{2})^2}$ ;  
c)  $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2} - \sqrt{(\sqrt{5}-4)^2} + \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}-2)^2}$ ;  
d)  $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} - \sqrt{(4-2\sqrt{5})^2} - \sqrt{(3\sqrt{5}-7)^2}$ .

8. Calculați:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sqrt{(5-3\sqrt{3})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} - \sqrt{(3-2\sqrt{3})^2}; & \text{b)} \sqrt{(\sqrt{2}-2)^2} - \sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2} - \sqrt{(1-\sqrt{2})^2}; \\ \text{c)} \sqrt{(4\sqrt{3}-7)^2} + \sqrt{(5-3\sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}; & \text{d)} \sqrt{(3\sqrt{2}-5)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-3)^2} - \sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2}. \end{array}$$

## 1.6. OPERAȚII CU NUMERE REALE

1. Calculați  $a + b$  și  $a - b$ , știind că:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} a = 14\sqrt{3} - 16\sqrt{3} + 17\sqrt{3} - 13\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 18\sqrt{3}; b = 8\sqrt{3} - 10\sqrt{3} - 12\sqrt{3} + 16\sqrt{3} - 14\sqrt{3} + 11\sqrt{3}; \\ \text{b)} a = 6\sqrt{2} + 17\sqrt{2} - 21\sqrt{2} - 14\sqrt{2} + 15\sqrt{2} - 10\sqrt{2}; b = 9\sqrt{2} - 21\sqrt{2} + 15\sqrt{2} - 14\sqrt{2} + 18\sqrt{2} - 12\sqrt{2}; \\ \text{c)} a = 17\sqrt{6} - 19\sqrt{6} + 11\sqrt{6} - 14\sqrt{6} - 16\sqrt{6} + 12\sqrt{6}; b = 12\sqrt{6} - 9\sqrt{6} + 7\sqrt{6} - 14\sqrt{6} + 16\sqrt{6} - 13\sqrt{6}. \end{array}$$

2. Calculați numerele, după ce ați scos factorii de sub radical:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} a = \sqrt{50} - \sqrt{18} + \sqrt{200} - \sqrt{98}; b = \sqrt{128} - \sqrt{32} + \sqrt{162} - \sqrt{72}; \\ \text{b)} c = \sqrt{108} - \sqrt{192} + \sqrt{300} - \sqrt{48}; d = \sqrt{147} - \sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{75}; \\ \text{c)} e = \sqrt{96} - \sqrt{150} + \sqrt{486} - \sqrt{24}; f = \sqrt{384} - \sqrt{864} + \sqrt{294} - \sqrt{54}; \\ \text{d)} g = \sqrt{320} - \sqrt{80} + \sqrt{125} - \sqrt{45}; h = \sqrt{180} - \sqrt{20} + \sqrt{245} - \sqrt{405}. \end{array}$$

3. Calculați numerele, după ce ați scos factorii de sub radical:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} x = (\sqrt{200} - \sqrt{98} + \sqrt{128} - \sqrt{50}) - (\sqrt{72} - \sqrt{32} + \sqrt{18} - \sqrt{8}); \\ \text{b)} y = (\sqrt{432} - \sqrt{243} + \sqrt{192} - \sqrt{48}) - (\sqrt{300} - \sqrt{147} + \sqrt{363} - \sqrt{108}); \\ \text{c)} z = (\sqrt{486} - \sqrt{150} + \sqrt{864} - \sqrt{384}) - (\sqrt{294} - \sqrt{96} + \sqrt{216} - \sqrt{600}); \\ \text{d)} t = (\sqrt{320} - \sqrt{180} + \sqrt{500} - \sqrt{80}) - (\sqrt{405} - \sqrt{125} + \sqrt{245} - \sqrt{45}). \end{array}$$

4. Calculați, după ce ați scos factorii de sub radical:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} 6\sqrt{50} - 3\sqrt{128} + 2\sqrt{162} - 4\sqrt{98}; & \text{b)} 5\sqrt{72} - 3\sqrt{200} + 7\sqrt{32} - 8\sqrt{18}; \\ \text{c)} 3\sqrt{147} - 5\sqrt{108} + 9\sqrt{27} - 6\sqrt{12}; & \text{d)} 2\sqrt{192} - 4\sqrt{75} + 3\sqrt{300} - 5\sqrt{48}; \\ \text{e)} 2\sqrt{864} - 5\sqrt{96} + 3\sqrt{294} - 6\sqrt{24}; & \text{f)} 3\sqrt{486} - 7\sqrt{54} + 3\sqrt{384} - 5\sqrt{150}; \\ \text{g)} 4\sqrt{125} - 3\sqrt{80} + 2\sqrt{405} - 5\sqrt{45}; & \text{h)} 2\sqrt{720} - 3\sqrt{245} + 4\sqrt{320} - 5\sqrt{180}. \end{array}$$

5. Calculați numerele, după ce ați scos factorii de sub radical:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} x = 7\sqrt{32} - 3\sqrt{288} + 5\sqrt{128} - 4\sqrt{72} + 2\sqrt{162} - 3\sqrt{98}; \\ \text{b)} y = 6\sqrt{48} - 3\sqrt{432} + 4\sqrt{243} - 2\sqrt{192} - 5\sqrt{108} + 7\sqrt{12}; \\ \text{c)} z = 5\sqrt{96} - 3\sqrt{150} + 4\sqrt{216} - 2\sqrt{486} + 2\sqrt{600} - 7\sqrt{294}; \\ \text{d)} t = 7\sqrt{125} - 4\sqrt{245} + 3\sqrt{405} - 11\sqrt{45} + 8\sqrt{80} - 2\sqrt{320}. \end{array}$$

6. Calculați numerele, după ce ați scos factorii de sub radical:

a)  $a = (8\sqrt{50} - 5\sqrt{98} + 3\sqrt{128}) - (3\sqrt{288} - 7\sqrt{72} + 2\sqrt{162})$ ;

b)  $b = (4\sqrt{108} - 3\sqrt{243} + 2\sqrt{75}) - (5\sqrt{192} - 4\sqrt{432} + 6\sqrt{27})$ ;

c)  $c = (8\sqrt{45} - 3\sqrt{180} + 4\sqrt{20}) - (3\sqrt{320} - 2\sqrt{405} + 4\sqrt{45})$ ;

d)  $d = (8\sqrt{150} - 5\sqrt{294} + 2\sqrt{216}) - (5\sqrt{486} - 9\sqrt{54} - 4\sqrt{96})$ .

7. a) Calculați numărul  $n = 2a - 3b$ , unde:

$$a = 9\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 6\sqrt{3} \text{ și } b = 10\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 8\sqrt{3} - 3\sqrt{3}.$$

b) Calculați numărul  $n = 3a + 2b$ , unde:

$$a = 8\sqrt{6} - 10\sqrt{6} + 6\sqrt{6} - 3\sqrt{6} + 7\sqrt{6} - 5\sqrt{6} \text{ și } b = -7\sqrt{6} + 11\sqrt{6} - 13\sqrt{6} + 6\sqrt{6} - 5\sqrt{6} + 4\sqrt{6}.$$

8. Arătați că numărul  $n = \frac{5a-3b}{3a-2b}$  este număr natural, unde:

a)  $a = \sqrt{32} - \sqrt{72} + \sqrt{128} - \sqrt{50} + \sqrt{18}$  și  $b = \sqrt{288} - \sqrt{162} + \sqrt{200} - \sqrt{98} - \sqrt{8}$ .

b)  $a = \sqrt{300} - \sqrt{192} + \sqrt{75} - \sqrt{27} + \sqrt{12}$  și  $b = \sqrt{432} - \sqrt{243} + \sqrt{147} - \sqrt{108} + \sqrt{48}$ .

9. Calculați numerele, după ce ați scos factorii de sub radical:

a)  $x = (\sqrt{200} - \sqrt{128} + \sqrt{288} - \sqrt{162}) - (3\sqrt{50} - 6\sqrt{8} - 2\sqrt{98} + 4\sqrt{72} - 5\sqrt{18})$ ;

b)  $y = (\sqrt{432} - \sqrt{300} + \sqrt{243} - \sqrt{75}) - (2\sqrt{192} - 5\sqrt{27} - 3\sqrt{108} + 4\sqrt{147} - 6\sqrt{12})$ ;

c)  $z = (\sqrt{384} - \sqrt{216} + \sqrt{864} - \sqrt{486}) - (3\sqrt{600} - 4\sqrt{294} + 5\sqrt{54} - 6\sqrt{96} + 2\sqrt{150})$ ;

d)  $t = (\sqrt{405} - \sqrt{180} + \sqrt{320} - \sqrt{125}) - (3\sqrt{500} - 2\sqrt{720} + 4\sqrt{245} - 5\sqrt{80} - 6\sqrt{20})$ .

10. a) Calculați numărul  $x = 2a + 3b$ , unde:

$$a = 5\sqrt{48} - 4\sqrt{108} + 6\sqrt{192} - 7\sqrt{75} \text{ și } b = 10\sqrt{27} - 11\sqrt{12} + 5\sqrt{147} - 4\sqrt{432}.$$

b) Calculați numărul  $x = 5a + 2b$ , unde:

$$a = 4\sqrt{50} - 8\sqrt{18} + 16\sqrt{8} - 5\sqrt{72} \text{ și } b = 5\sqrt{98} - 6\sqrt{32} - 4\sqrt{128} + 3\sqrt{162}.$$

c) Calculați numărul  $x = 8a + 5b$ , unde:

$$a = 5\sqrt{150} - 4\sqrt{96} + 3\sqrt{216} - 8\sqrt{54} \text{ și } b = 3\sqrt{294} - 4\sqrt{384} + 13\sqrt{24} - 2\sqrt{486}.$$

11. a) Calculați numărul  $a + b$  și  $3a + 7b$ , unde:

$$a = 3(4\sqrt{162} - 5\sqrt{72} + 6\sqrt{98} - 8\sqrt{50}) \text{ și } b = 2(3\sqrt{288} - 5\sqrt{128} + 2\sqrt{200} - 7\sqrt{18}).$$

b) Calculați numărul  $a - b$  și  $5a - 4b$ , unde:

$$a = 2(6\sqrt{147} - 5\sqrt{243} - 4\sqrt{432} + 7\sqrt{192}) \text{ și } b = 3(3\sqrt{300} - 7\sqrt{108} - 4\sqrt{75} + 9\sqrt{48}).$$

c) Calculați numărul  $a - 3b$  și  $3a - 5b$ , unde:

$$a = 2(2\sqrt{320} - 4\sqrt{125} + 6\sqrt{80} - 7\sqrt{20}) \text{ și } b = 3(5\sqrt{245} - 4\sqrt{180} - 6\sqrt{405} + 15\sqrt{45}).$$

12. a) Calculați numărul  $(a \cdot b) : 36$  și  $2a\sqrt{3} + 3b\sqrt{2}$ , unde:

$$a = -3\sqrt{6}(4\sqrt{147} - 5\sqrt{75} + 3\sqrt{108} - 6\sqrt{48} - 8\sqrt{12} + 7\sqrt{27}) \text{ și}$$

$$b = 4\sqrt{6}(6\sqrt{98} - 5\sqrt{50} + 4\sqrt{72} - 7\sqrt{32} + 8\sqrt{8} - 9\sqrt{18}).$$

b) Calculați numărul  $(a \cdot b) : 48$  și  $3a\sqrt{2} + 2b\sqrt{3}$ , unde:

$$a = 3\sqrt{6}(4\sqrt{72} - 7\sqrt{18} + 6\sqrt{128} - 5\sqrt{98} + 9\sqrt{8} - 8\sqrt{32}) \text{ și}$$

$$b = 2\sqrt{6}(6\sqrt{147} - 7\sqrt{75} + 4\sqrt{108} - 8\sqrt{48} + 12\sqrt{12} - 9\sqrt{27}).$$

13. Efectuați calculele:

a)  $16(\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) + 13(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}) - 9(3\sqrt{3} - 4\sqrt{2});$

b)  $3(4\sqrt{3} - 3\sqrt{6}) - 5(3\sqrt{3} + 4\sqrt{6}) + 2(3\sqrt{3} + 7\sqrt{6}).$

14. Calculați numerele  $x = A \cdot B$  și  $y = 3A\sqrt{3} + 4B\sqrt{2}$ , unde:

a)  $A = \sqrt{32} - \sqrt{50} + \sqrt{72} - \sqrt{18} + \sqrt{8}; B = \sqrt{12} - \sqrt{147} + \sqrt{48} - \sqrt{108} + \sqrt{75};$

b)  $A = \sqrt{18} - \sqrt{128} + \sqrt{32} - \sqrt{50} + \sqrt{98}; B = \sqrt{192} - \sqrt{108} + \sqrt{75} - \sqrt{48} - \sqrt{12}.$

15. Calculați produsul  $A \cdot B$  și raportul  $\frac{A}{B}$ , unde:

a)  $A = \sqrt{12}(\sqrt{98} - \sqrt{128} + \sqrt{32} - \sqrt{50}); B = \sqrt{8}(\sqrt{432} - \sqrt{300} + \sqrt{108} - \sqrt{147});$

b)  $A = \sqrt{48}(\sqrt{32} - \sqrt{72} + \sqrt{162} - \sqrt{288}); B = \sqrt{8}(\sqrt{192} - \sqrt{108} + \sqrt{75} - \sqrt{243}).$

16. Calculați  $a + b$  și  $a - b$ , știind că:

a)  $a = 3\sqrt{150}(8\sqrt{50} - 10\sqrt{48} + 7\sqrt{108} - 6\sqrt{98}); b = 4\sqrt{54}(8\sqrt{72} - 11\sqrt{32} + 4\sqrt{75} - 3\sqrt{192});$

b)  $a = 5\sqrt{24}(5\sqrt{75} - 3\sqrt{243} - 3\sqrt{432} + 4\sqrt{192}); b = 3\sqrt{216}(5\sqrt{128} - 6\sqrt{200} + 4\sqrt{162} - 3\sqrt{72}).$

17. Calculați produsul  $a \cdot b$  și numărul  $2a\sqrt{2} + 5b\sqrt{3}$ , unde:

a)  $a = 4\sqrt{48} - 3\sqrt{75} + 2\sqrt{108} - 6\sqrt{27} + \sqrt{147}; b = 6\sqrt{18} + 2\sqrt{128} - 5\sqrt{32} - 4\sqrt{50} + \sqrt{98};$

b)  $a = 4\sqrt{147} - 2\sqrt{75} + 3\sqrt{108} - 6\sqrt{12} - 5\sqrt{48}; b = 3\sqrt{50} - 2\sqrt{72} + 5\sqrt{18} - 4\sqrt{32} - 2\sqrt{8}.$

18. Calculați  $a \cdot b$ , unde:

a)  $a = 3\sqrt{32} + 6\sqrt{108} - 7\sqrt{27} - 5\sqrt{72} + 2\sqrt{162}; b = 7\sqrt{27} - 3\sqrt{12} + 8\sqrt{32} - 2\sqrt{98} - 3\sqrt{75};$

b)  $a = 3\sqrt{288} - 4\sqrt{50} - 2\sqrt{128} + 5\sqrt{32}; b = 3\sqrt{192} - 4\sqrt{75} - 8\sqrt{27} + 3\sqrt{108};$

c)  $a = 7\sqrt{18} - 3\sqrt{72} - \sqrt{162} + 3\sqrt{32} - 2\sqrt{8}; b = 4\sqrt{75} - 5\sqrt{27} + 3\sqrt{108} - 4\sqrt{48} - 3\sqrt{12}.$

19. Calculați numerele  $a = x \cdot y$  și  $b = 2x\sqrt{2} + y\sqrt{3}$ , unde:

a)  $x = \sqrt{96}(\sqrt{288} - \sqrt{162} + \sqrt{32} - \sqrt{128}); y = \sqrt{150}(\sqrt{432} - \sqrt{300} + \sqrt{147} - \sqrt{192});$

b)  $x = \sqrt{24}(3\sqrt{50} - 2\sqrt{32} - 3\sqrt{18} + 5\sqrt{8} - \sqrt{72}); y = \sqrt{54}(\sqrt{432} - \sqrt{243} + \sqrt{192} - \sqrt{300} - \sqrt{12}).$

1

## PATROLATERUL

- I.1. Patrulatere convexe
- I.2. Paralelogramul
- I.3. Linia mijlocie în triunghi
- I.4. Dreptunghiul
- I.5. Rombul
- I.6. Pătratul
- I.7. Trapezul
- I.8. Aria triunghiului
- I.9. Aria patrulaterului

2

## CERCUL

3

## ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR

- III.1. Teorema lui Thales
- III.2. Teorema fundamentală a asemănării

4

## RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC

## I.1. PATRULATERE CONVEXE

- În patrulaterul convex  $ABCD$  se știe că  $5\angle C = 4\angle D$ ,  $6\angle D = 5\angle B$ ,  $4\angle A = 9\angle C$ . Calculați măsurile unghiurilor patrulaterului  $ABCD$ .
- Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că acestea sunt proporționale cu numerele 2, 3, 6 și, respectiv, 7.
- Suma măsurilor a două dintre unghiurile unui patrulater convex este  $160^\circ$ . Știind că patrulaterul are trei unghiuri congruente, calculați măsurile unghiurilor patrulaterului.
- Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex  $ABCD$ , știind că suma măsurilor unghiurilor  $A$  și  $C$  este egală cu  $205^\circ$ , suma măsurilor unghiurilor  $B$ ,  $D$  și  $C$  este egală cu  $250^\circ$  și diferența măsurilor unghiurilor  $B$  și  $D$  este egală cu  $15^\circ$ .
- Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că acestea sunt direct proporționale cu numerele 4, 5, 6 și, respectiv, 9.
- Calculați măsurile unghiurilor unui patrulater convex  $ABCD$  ale cărui unghiuri verifică egalitățile:

$$\angle D = \frac{2}{3}\angle C; \angle A = \frac{1}{6}\angle C; \angle B = \frac{5}{4}\angle D.$$

- Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că acestea sunt invers proporționale cu numerele 0,(1), 0,125, 0,(3) și, respectiv, 0,25.
- Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex  $ABCD$ , știind că măsurile unghiurilor  $B$ ,  $C$  și, respectiv,  $D$  sunt proporționale cu numerele 3, 4 și 8, iar măsurile unghiurilor  $D$  și  $A$  sunt invers proporționale cu numerele 0,125 și 0,(1).
- Calculați măsurile unghiurilor patrulaterului convex  $ABCD$ , știind că:
 
$$\angle B = 1,25\angle D; \angle D = 0,(6)\angle C; \angle A = 0,1(6)\angle C.$$

## I.2. PARALELOGRAMUL

- În paralelogramul  $ABCD$  se duc  $AE \perp BD$  și  $CF \perp BD$ , unde  $E, F \in BD$ . Demonstrați că  $AECF$  este paralelogram.
- În paralelogramul  $ABCD$  se consideră punctele  $M \in CD$ ,  $N \in BC$ ,  $P \in AB$  și  $Q \in AD$ , astfel încât  $PB \equiv MD$  și  $BN \equiv DQ$ . Demonstrați că  $MNPQ$  este paralelogram.
- În paralelogramul  $ABCD$ , unde  $AC \cap BD = \{O\}$ , se consideră punctele  $E, F, G$  și, respectiv,  $H$  mijloacele segmentelor  $AO, BO, CO$  și, respectiv,  $DO$ . Arătați că  $EFGH$  este paralelogram.
- În paralelogramul  $ABCD$ , unde  $AC \cap BD = \{O\}$ , se consideră punctele  $M \in AD$  și  $N \in BC$ , astfel încât  $AM \equiv CN$ . Demonstrați că:
  - $ANCM$  este paralelogram;
  - punctul  $O$  este mijlocul segmentului  $MN$ .

5. În paralelogramul  $ABCD$  se consideră semidreapta  $BM$  bisectoarea unghiului  $ABC$ ,  $M \in AC$ , și semidreapta  $DN$  bisectoarea unghiului  $ADC$ ,  $N \in AC$ . Demonstrați că  $BMDN$  este paralelogram.
6. În paralelogramul  $ABCD$  cu  $AC \cap BD = \{O\}$ , se prelungește latura  $AD$  cu segmentul  $DM$  și latura  $CB$  se prelungește cu segmentul  $BN$ , astfel încât  $D \in AM$  și  $B \in CN$ , iar  $DM \equiv BN$ .
- Arătați că patrulaterul  $AMCN$  este paralelogram.
  - Demonstrați că punctele  $M, O, N$  sunt coliniare.
7. În paralelogramul  $ABCD$  cu  $AC \cap BD = \{O\}$ , punctele  $M \in OC$  și  $N \in OA$ , astfel încât  $CM \equiv OM$  și  $AN \equiv ON$ .
- Arătați că patrulaterul  $DMBN$  este paralelogram.
  - Dacă punctele  $P \in OD$  și  $T \in OB$ , astfel încât  $PD \equiv OP$  și  $BT \equiv OT$ , arătați că patrulaterul  $PMTN$  este paralelogram.
8. În paralelogramul  $ABCD$ , bisectoarele unghiurilor  $BAD$  și  $BCD$  intersectează dreapta  $BD$  în punctele  $M$  și, respectiv,  $N$ , iar bisectoarele unghiurilor  $ADC$  și  $ABC$  intersectează dreapta  $AC$  în punctele  $P$  și, respectiv,  $T$ .
- Arătați că patrulaterul  $AMCN$  este paralelogram.
  - Arătați că patrulaterul  $MPNT$  este paralelogram.
9. În triunghiul  $ABC$ , punctele  $D \in BC$  și  $E \in AB$ , astfel încât  $BD \equiv CD$  și  $AE \equiv BE$ . Dacă punctul  $F$  este simetricul punctului  $A$  față de punctul  $D$  și punctul  $G$  este simetricul punctului  $C$  față de punctul  $E$ , arătați că:
- patrulaterul  $ABFC$  este paralelogram;
  - patrulaterul  $ACBG$  este paralelogram;
  - punctele  $F, B$  și  $G$  sunt coliniare.
10. În triunghiul  $ABC$ ,  $AM$  este mediană,  $M \in BC$ , iar punctul  $N \in AB$ . Dacă punctul  $P$  este simetricul punctului  $N$  față de punctul  $M$ , arătați că:
- $BN \equiv CP$ ;
  - $BP \parallel CN$ .

### 1.3. LINIA MIJLOCIE ÎN TRIUNGHI

1. În triunghiul  $ABC$  se consideră punctele  $M$  și  $N$  pe latura  $AB$ , astfel încât  $AM \equiv MN \equiv NB$ . Se notează cu  $P$  mijlocul laturii  $BC$ , iar punctul  $Q$  este simetricul punctului  $N$  față de punctul  $P$ . Dacă  $AP \cap QM = \{G\}$  și  $NG \cap AQ = \{T\}$ , arătați că  $AT \equiv TQ$ .
2. În triunghiul  $ABC$  se consideră punctele  $D$  și  $E$  mijloacele laturilor  $AB$  și  $AC$ , iar  $F$  un punct oarecare pe latura  $BC$ . Dacă punctul  $M$  este mijlocul segmentului  $AF$ , arătați că punctul  $M$  aparține segmentului  $DE$ .
3. În paralelogramul  $ABCD$ ,  $AC \cap BD = \{O\}$ , iar punctele  $M$  și  $N$  sunt mijloacele laturilor  $AD$  și, respectiv,  $BC$ . Arătați că punctele  $M, O, N$  sunt coliniare.
4. În patrulaterul convex  $ABCD$  se consideră punctele  $M, N, P, Q$  mijloacele laturilor  $AB, BC, CD$  și, respectiv,  $DA$ . Arătați că patrulaterul  $MNPQ$  este paralelogram.